ابن خلدون
تيارت

الاسم و اللقب : ............................ المقياس : ...................... تاريخ الامتحان : ......................

1

Corrigé type de l'EMD de Mécanique Quantique I

10

Exercice 1 : 1) L'opérateur $\sigma$ est hermitique s'il vérifie la condition $\sigma = \sigma^+$

$(\sigma)_{ij} = \sigma^*_{ji}$ si $i = j$ : $\sigma_{ii} = \sigma^*_{ii}$ : éléments diagonaux doivent être réels

si $\neq j$ : éléments symétriques / diagonale doivent conjugués l'un de l'autre

Ces conditions sont vérifiées dans notre cas : $\sigma$ est donc hermitique 1

2) Valeurs propres : $\det(\sigma - \lambda I) = 0$ $\begin{vmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\lambda^2 + i^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$ 1,5 1,5

Vecteurs propres : pour $\lambda = -1$ $\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$

$x_1 - i x_2 = 0$ et $|x_1|^2 + |x_2|^2 = 1$

on obtient :

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$ 1

pour $\lambda = +1$, on obtient : $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ 1

3) Relation d'orthogonalité : $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle \overset{?}{=} 0$

$\langle \psi_1 | = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \quad i)$ et $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \quad i) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = 0$

$|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$ sont orthogonaux 1

ورقة الإضافية رقم : ............

الإسم واللقب : ............................ المقياس: ................ تاريخ الإمتحان: ....................

(2)

Relation de fermeture : $|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + |\psi_2\rangle\langle\psi_2| \overset{?}{=} \mathbb{1}$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}(1 \quad i) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}(1 \quad -i) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & i\\-i & 1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -i\\i & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \mathbb{1}$$ (1)

4) $P_{|\psi_1\rangle} = |\psi_1\rangle\langle\psi_1|$ ; $(\rho)_{ij} = \langle u_i | P_{|\psi_1\rangle} | u_j\rangle$

$$\rho_{11} = \langle u_1|\psi_1\rangle\langle\psi_1|u_1\rangle = (1 \quad 0)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}(1 \quad i)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(1 \quad 0)\begin{pmatrix}1 & i\\-i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(1 \quad 0)\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix} = \frac{1}{2}$$

$$\rho_{12} = \langle u_1|\psi_1\rangle\langle\psi_1|u_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \quad 0)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}(1 \quad i)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(1 \quad 0)\begin{pmatrix}1 & i\\-i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(1 \quad 0)\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix} = \frac{i}{2} \dots\dots$$

$$\rho_1 = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{i}{2}\\-\frac{i}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$ (1)

les mêmes calculs avec $P_{|\psi_2\rangle} = |\psi_2\rangle\langle\psi_2|$ mènent à :

$$\rho_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -i\\i & 1\end{pmatrix}$$ (1)

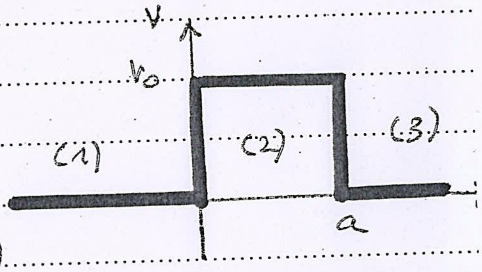
ورقة الإضافية رقم : ............

سم واللقب : ..........................

المقياس: .................... تاريخ الإمتحان: ....................

3

10 Exercice 2 : 1) les équations de Schrödinger dans les trois régions (Exercice résolu dans le cours)




$$\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} + k_1^2\varphi_1 = 0 \text{ avec } k_1^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E$$ 0,5

$$\frac{d^2\varphi_2}{dx^2} - \rho^2\varphi_2 = 0 \text{ avec } \rho^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)$$ 0,5

$$\frac{d^2\varphi_3}{dx^2} + k_1^2\varphi_3 = 0$$

les solutions des équations : $\varphi_1(x) = A_1 e^{ik_1x} + A'_1 e^{-ik_1x}$ 0,5

$$\varphi_2(x) = A_2 e^{\rho x} + A'_2 e^{-\rho x}$$ 0,5

$$\varphi_3(x) = A_3 e^{ik_1x} + A'_3 e^{-ik_1x}$$

avec $A'_3 = 0$ : Dans la région (3), il ne peut y avoir un terme réfléchi 1

2) L'expression du coefficient de transmission T s'obtient à partir de celle donnée dans l'énoncé (cas où $E > V_0$) en remplaçant $k_2$ par $-i\rho$ et $\sin(-i\rho a) = -i\, sh(\rho a)$

$$T = \frac{4E(V_0 - E)}{4E(V_0 - E) + V_0^2\, sh^2(\rho a)}$$ 2

3) $\frac{1}{\rho} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0 - E)}} = \frac{hc}{2\pi\sqrt{2mc^2(V_0 - E)}} = \frac{1,96}{\sqrt{(V_0 - E)}}$ Å 2

4) $E = 1\,eV$ ; $V_0 = 2\,eV$ ; $a = 1$ Å , on obtient $\frac{1}{\rho} = 1,96$ Å et $T = 0,78$ 1

$= 78\%$

L'électron a environ 8 chances sur 10 de traverser la barrière même avec $E < V_0$ : Effet Tunnel 2